Модел. и анализ информ. систем. Т. **22**, № **1** (2015) 127–143

УДК 517.5

О приближении периодических функций в L_2 и значениях поперечников некоторых классов функций

Тухлиев К.

Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова, 735700 Таджикистан, г. Худжанд, проезд Мавлонбекова, 1

e-mail: kamaridin.t54@mail.ru

получена 15 ноября 2013

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, оператор Стеклова, обобщённый модуль непрерывности, n-поперечники

Получены точные неравенства Джексона–Стечкина, в которых вместо обычных модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f,t)$ используется специальный модуль непрерывности $\widetilde{\Omega}_m(f,t)$, определённый при помощи функции Стеклова. Такие обобщённые модули непрерывности m-го порядка впервые были введены В.А. Абиловым и Ф.В. Абиловой. Указанные обобщённые модули непрерывности нашли своё дальнейшее применение при решении экстремальных задач теории полиномиальной аппроксимации в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0,2\pi]$ в работах М.Ш. Шабозова и Г.А. Юсупова, С.Б. Вакарчука и В.И. Забутной и других авторов.

Продолжая и развивая указанную тематику в данной работе для некоторых классов функций, определённых усреднёнными значениями указанных модулей непрерывности, автор получает точные значения различных n-поперечников в гильбертовом пространстве L_2.

1. Наилучшее полиномиальное приближение в L_2

Задачи нахождения точных оценок наилучших приближений 2π-периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, структурные свойства которых характеризуются скоростью стремления к нулю модулей непрерывности высших порядков, рассмотрены, например, в [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Здесь мы продолжим исследования в этом направлении и уточним некоторые результаты, полученные в работах [13], [15] и [20].

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – множество всех положительных чисел вещественной оси. Пусть $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Совокупность всевозможных тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

порядка не выше $n-1$ обозначим символом $\mathcal{T}_{2n-1}$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина её наилучшего полиномиального приближения элементами T_{n-1} из подпространства $\mathcal{T}_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) = \inf\Big\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}\Big\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \tag{1.1}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

– частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x), a_k(f), b_k(f)$ – косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции $f(x)$, $\rho_0^2(f) = \dfrac{a_0^2(f)}{2}$, $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $k \in \mathbb{N}$. Символом $L_2^{(r)}$, $(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2.

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения для изучения структурных и конструктивных свойств функции $f \in L_2$ часто используют различные модификации обычного модуля непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(f, t) = \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f; \cdot)\|_{L_2} : \ |h| \le t\Big\} =$$

$$= \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h) \right\|_{L_2} : \ |h| \le t \right\}. \tag{1.2}$$

Например, с целью отыскании точных констант в неравенстве типа Джексона – Стечкина в работе [11] использована усреднённая характеристика гладкости

$$\Omega_m(f,t)_2 := \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \left\| \Delta_{\overline{h}}^m(f;\cdot) \right\|_{L_2} dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \tag{1.3}$$

где $t > 0$; $\overline{h} := (h_1, h_2, \ldots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$. В [21] установлено, что в пространстве $L_p[0,2\pi]$ $(0 < p < 1)$ имеет место соотношение $\Omega_m(f,t)_p \asymp \omega_m(f,t)_p$.

Еще одна модификация модуля непрерывности (1.2) получается при помощи функции (оператора) Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(\tau)d\tau, \ h > 0,$$

если последовательно полагать $S_{h,k}(f,x) \overset{def}{=} S_h\Big(S_{h,k-1}(f;\cdot);x\Big)$, $k \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f,x) \equiv f(x)$.

Пусть I – единичный оператор в пространстве L_2. Следуя обозначениям [10], определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f;x) \overset{def}{=} S_h(f,x) - f(x) = (S_h - I)(f;x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) \overset{def}{=} \widetilde{\Delta}_h^1\left(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;\cdot);x\right) = (S_h - I)^m(f;x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} S_{h,k}(f;x),$$

где $m = 2, 3, 4, \ldots$ Используя указанные обозначения, рассмотрим следующую характеристику гладкости [10]:

$$\widetilde{\Omega}_m(f;t) \overset{def}{=} \sup\Big\{ \Big\| \widetilde{\Delta}_h^m(f;\cdot) \Big\| : \ 0 < h \le t \Big\}, \tag{1.4}$$

которую назовем *обобщённым модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_2$. Легко проверить, что функция $\widetilde{\Omega}_m(f;t)$ обладает всеми свойствами обычного модуля непрерывности m-го порядка (см., например, монографию [22, с. 157–170]).

Напомним, что под неравенствами типа Джексона – Стечкина в широком смысле в любом нормированном пространстве X понимают соотношение вида

$$E_{n-1}(f)_X \le \chi \, n^{-r} U_m(f^{(r)}; \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \ \tau > 0,$$

в которых погрешность приближения индивидуальной функции f оценивается через заданную характеристику гладкости U_m (например, $U_m = \omega_m$, $U_m = \Omega_m$ или $U_m = \widetilde{\Omega}_m$) самой приближаемой функции или некоторой её производной $f^{(r)} \in X$. Очевидно, что от приближаемой функции f требуется только, чтобы любая модификация модуля непрерывности U_m, через который оценивается наилучшее полиномиальное приближение, имела смысл. Здесь также возникает экстремальная задача получения неравенств, неулучшаемых на заданных классах функций.

Исследуя вопросы наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$, Н.И. Черных отметил [1], что для характеристики величины $E_{n-1}(f)$ более естественным является не джексоновский функционал $\omega_m(f^{(r)}, \pi/n)$, а функционал

$$\Phi_n(f^{(r)}) := \left\{ \frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \omega_m^2(f^{(r)}, t) \sin ntdt \right\}^{1/2},$$

поскольку для произвольного $f \in L_2^{(r)}$ выполняется соотношение

$$\Phi_n(f^{(r)}) \le \omega_m(f^{(r)}, \pi/n).$$

Учитывая указанные соображения, для компактного изложения всех полученных в этом направлении результатов, вводим следующую экстремальную характеристику (всюду далее соотношение $\dfrac{0}{0}$ полагаем равным нулю):

$$\chi_{n,r,p}(U_m; \varphi, h) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \ne const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h U_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)dt \right)^{1/p}}, \tag{1.5}$$

где $m, n \in \mathbb{N};\ r \in \mathbb{Z}_+;\ p \in \mathbb{R}_+;\ 0 < h \le \pi/n;\ \varphi(t) \ge 0$ – суммируемая на $[0, h]$ функция. Отметим, что величина (1.5) при $U_m = \omega_m$ и $0 < p \le 2$ была исследована в работах [14, 16], а при $p = 2$ и $U_m = \omega_m$ еще раньше А.А. Лигуном [5] и при различных значениях параметров m, p и конкретных весовых функциях $\varphi(t)$ многими другими математиками (подробную литературу с комментариями см. в [14]). Случай $U_m = \Omega_m$ рассмотрен в [11], а в [13] задача (1.5) изучалась для $U_m = \widetilde{\Omega}_m$. Последний случай чуть позже изучался в работе [19]. Основной результат, полученный в [13], заключается в следующем.

Пусть $m, n \in \mathbb{N};\ r \in \mathbb{Z}_+;\ 0 < p \le 2$ и $\varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на $[0, h]$ функция. Тогда справедливы неравенства

$$\{\mathcal{A}_{n,m,r,p}(\varphi, h)\}^{-1} \le \mathcal{X}_{n,r,p}(\widetilde{\Omega}_m; \varphi, h) \le \left\{ \inf_{k \ge n} \mathcal{A}_{k,m,r,p}(\varphi, h) \right\}^{-1}, \tag{1.6}$$

где

$$\mathcal{A}_{k,m,r,p}(\varphi, h) := \left(k^{rp} \int\limits_0^h \left(1 - \frac{\sin kt}{kt} \right)^{mp} \varphi(t)dt \right)^{1/p}. \tag{1.7}$$

Возникает естественный вопрос: выяснить случаи или указать конкретные свойства весовых функций, для которых при всех $0 < h \le \pi/n$ имеет место равенство

$$\inf_{k \ge n} \mathcal{A}_{k,m,r,p}(\varphi, h) = \mathcal{A}_{n,m,r,p}(\varphi, h). \tag{1.8}$$

В работе [13] доказывается, что если весовая функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[0,h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой и при некоторых $r\in\mathbb{N},\ 1/r<p\le 2$ и любых $t\in[0,h]$ выполнено дифференциальное неравенство

$$(rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)>0, \tag{1.9}$$

то справедливо соотношение (1.8). Класс весовых функций, удовлетворяющих условию (1.9), является достаточно узким, поскольку, очевидно, не все весовые функции на заданном отрезке $[0,h]$ являются непрерывно дифференцируемыми. Здесь предлагается более простое условие для выполнения (1.8). От заданных весовых функций $\varphi(t)$ на отрезке $[0,h]$ требуется только лишь неотрицательность и суммируемость. Имеет место следующая

Теорема 1.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N},\ 0<p\le 2,\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<h\le\pi/n,\ \varphi(t)$ – неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ весовая функция. Тогда выполняется соотношение (1.8) и, следовательно, справедливо равенство*

$$\mathcal{X}_{n,r,p}\left(\widetilde{\Omega}_m;\varphi,h\right)=n^{-r}\left(\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{1.10}$$

Существует функция $f_0\in L_2^{(r)}$, реализующая верхнюю грань в (1.5) при $U_m=\widetilde{\Omega}_m$.

Доказательство. Докажем, что при сделанных предположениях относительно всех указанных параметров и весовой функции φ выполняется равенство (1.8). Для этого достаточно доказать, что при выполнении условия теоремы функция

$$y(x)=x^{rp}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp}\varphi(t)dt \tag{1.11}$$

в области $Q_n=\{x:\ x\ge n\}$, $n\in\mathbb{N}$ является монотонно возрастающей и

$$\min\Big\{y(x):x\in Q_n\Big\}=y(n)=n^{rp}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp}\varphi(t)dt. \tag{1.12}$$

С целью установления (1.12), дифференцируя (1.11) и применяя элементарное тождество

$$\frac{d}{dx}\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp}=\frac{t}{x}\cdot\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp},$$

будем иметь

$$y'(x)=rpx^{rp-1}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp}\varphi(t)dt+x^{rp}\int\limits_0^h\frac{d}{dx}\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp}\varphi(t)dt=$$

$$=rpx^{rp-1}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp}\varphi(t)dt+$$

$$+x^{rp-1}\left\{h\varphi(h)\left(1-\frac{\sin xh}{xh}\right)^{mp}-\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp}d(t\varphi(t))\right\}.$$

Применяя теорему о среднем к интегралу в фигурной скобке, окончательно приходим к неравенству

$$y'(x)=rpx^{rp-1}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin xt}{xt}\right)^{mp}\varphi(t)dt+$$

$$+x^{rp-1}\left\{h\varphi(h)\left[\left(1-\frac{\sin xh}{xh}\right)^{mp}-\left(1-\frac{\sin x\xi}{x\xi}\right)^{mp}\right]\right\}\geq 0, \tag{1.13}$$

где $0\leq\xi\leq h$. Из (1.13) сразу следует равенство (1.12) и таким образом равенство (1.8) доказано. Тем самым в силу (1.8) из неравенства (1.6) вытекает (1.10). Непосредственным вычислением легко проверить, что функция $f_0(x)=\sin nx\in L_2^{(r)}$ в равенстве (1.5) реализует точную верхнюю грань в случае $U_m=\widetilde{\Omega}_m$, равную правой части (1.10), чем и завершаем доказательство теоремы 1.1. В частности, из утверждения теоремы 1.1 вытекает

Следствие 1.1. *В условиях теоремы 1.1, при $\varphi(t)\equiv 1,\ 0\leq t\leq h$ и $\varphi(t)=t$, $0\leq t\leq h$ соответственно имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}, \tag{1.14}$$

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h t\widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}}=\left\{\int\limits_0^h t\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.15}$$

Равенство (1.14) ранее было получено при ограничении $1/r<p\leq 2$ в работе [15], а соотношение (1.15) при этом же ограничении доказано в [20].

2. Точные значения поперечников некоторых классов функций

Прежде чем привести основной результат работы, напомним необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем. Пусть $S=\{\varphi\in L_2:\|\varphi\|\leq 1\}$ – единичный шар в L_2; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное множество в L_2;

$\Lambda_n \subset L_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $l : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор; $l^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| :\ f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| :\ g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - lf\| :\ f \in \mathfrak{M}\right\} : lL_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - l^{\perp}f\| :\ f \in \mathfrak{M}\right\} : l^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками. Перечисленные выше n-поперечники в гильбертовом пространстве L_2 удовлетворяют соотношениям [17, 18]:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \le d^n(\mathfrak{M}, L_2) \le d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{2.1}$$

Для множество $\mathfrak{M} \subset L_2$ также полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) = \sup\Big\{ E_{n-1}(f) :\ f \in \mathfrak{M} \Big\}.$$

Пусть $\Phi(t)$ – непрерывная неубывающая при $t \ge 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W_{p,h}^{(r)}\Big(\widetilde{\Omega}_m; \Phi\Big)$, $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{2}{h^2}\int_0^h t\widetilde{\Omega}_m^p(f^{(r)}; t)dt\right)^{1/p} \le \Phi(t).$$

Всюду далее t_* – значение аргумента $t \in \mathbb{R}_+$ функции $\sin t/t$, при котором эта функция достигает своего наименьшего значения [19]. Простой подсчёт показывает, что t_* – минимальный положительный корень уравнения $\operatorname{tg} t = t$ $(4,49 < t_* < 4,51)$.

Введём обозначение

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \left\{1 - \frac{\sin t}{t},\ 0 < t \le t_*;\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если } t \ge t_*\right\}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Если мажоранта $\Phi(t)$ при любых $h \in \mathbb{R}_+, m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$ удовлетворяет соотношению*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \left(\int_0^{nh} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp} dt\right)\left(\int_0^{\pi} t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt\right)^{-1}, \tag{2.3}$$

то имеют место равенства

$$\mu_{2n}\left(W^{(r)}_{p,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi),L_2\right)=\mu_{2n-1}\left(W^{(r)}_{p,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi),L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi)\right)=2^{-1/p}n^{-r}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad(2.4)$$

где $\mu_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot),d^n(\cdot),d_n(\cdot),\delta_n(\cdot),\Pi_n(\cdot)$. При этом множество мажорантных функций $\{\Phi\}$, удовлетворяющих ограничению (2.3), не пусто.

Доказательство. Из экстремального равенства (1.15) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f)\le n^{-r+\frac{2}{p}}\left(\int\limits_0^{nh}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_0^{h}t\widetilde{\Omega}^p_m(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}.\qquad(2.5)$$

Из неравенства (2.5), учитывая определение класса $W^{(r)}_{p,h}(\widetilde{\Omega}_m;\Phi)$ и соотношения (2.1), получаем оценку сверху для всех перечисленных выше n-поперечников при значении $h=\pi/n:$

$$\mu_{2n}\left(W^{(r)}_{p,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi),L_2\right)\le\mu_{2n-1}\left(W^{(r)}_{p,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi),L_2\right)\le$$

$$\le E_{n-1}\left(W^{(r)}_{p,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi)\right)\le$$

$$\le n^{-r+\frac{2}{p}}\left(\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_0^{\pi/n}t\widetilde{\Omega}^p_m(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}=$$

$$=2^{-1/p}n^{-r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\left(2\left(\frac{n}{\pi}\right)^2\int\limits_0^{\pi/n}t\widetilde{\Omega}^p_m(f^{(r)},t)dt\right)^{1/p}\le$$

$$\le 2^{-1/p}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}n^{-r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).\qquad(2.6)$$

Чтобы доказать теорему, достаточно получить оценку снизу для бернштейновского n-поперечника, равную правой части неравенства (2.6). С этой целью введём в рассмотрение $(2n+1)$-мерную сферу полиномов

$$S_{2n+1}\overset{def}{=}\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \|T_n\|=2^{-1/p}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}n^{-r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и покажем, что имеет место включение $S_{2n+1}\subset W^{(r)}_{p,h}(\widetilde{\Omega}_m;\Phi)$.

В [11] доказано, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n\in\mathcal{T}_{2n-1}$ справедливо неравенство

$$\widetilde{\Omega}_m(T_n^{(r)},t)\le n^r\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^m\|T_n\|\,. \tag{2.7}$$

Сначала возведём обе части неравенства (2.7) в степень p $(0<p\le 2)$, умножим на $2t/h^2$ и проинтегрируем полученное соотношение по t в пределах от 0 до h. Затем в интеграле, расположенном в правой части полученного неравенства, произведём замену переменной $nt=\tau$, а также заменим норму полинома $T_n\in S_{2n+1}$ радиусом сферы. В итоге с учётом условия (2.3) получаем

$$\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\widetilde{\Omega}_m^p(T_n^{(r)},t)dt\right)^{1/p}\le n^r\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp}dt\right)^{1/p}\|T_n\|=$$

$$=n^r\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h t\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp}dt\right)^{1/p}2^{-1/p}n^{-r}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)=$$

$$=\left(\left(\frac{\pi}{nh}\right)^2\int\limits_0^{nh} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp}dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^\pi t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\le\Phi(h).$$

Этим включение $S_{2n+1}\subset W^{(r)}_{p,h}(\widetilde{\Omega}_m;\Phi)$ доказано. Используя неравенство (2.1) и определение бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу рассматриваемых аппроксимационных характеристик

$$\mu_{2n-1}\left(W^{(r)}_{p,h}(\widetilde{\Omega}_m;L_2),L_2\right)\ge\mu_{2n}\left(W^{(r)}_{p,h}(\widetilde{\Omega}_m;L_2),L_2\right)\ge$$
$$\ge b_{2n}\left(W^{(r)}_{p,h}(\widetilde{\Omega}_m;L_2),L_2\right)\ge b_{2n}(S_{2n+1};L_2)=$$
$$=2^{-1/p}\left(\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^\pi t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt\right)^{-1/p}n^{-r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.8}$$

Требуемое равенство (2.4) следует из сопоставления оценки сверху (2.6) и оценки снизу (2.8). Теперь покажем, что мажорантная функция $\Phi_*(t)=t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha:=\alpha(m,p)=\frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt}-2, \tag{2.9}$$

удовлетворяет ограничению (2.3). В самом деле, подставляя функцию $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$ в соотношение (2.3), приходим к неравенству

$$\left(\frac{nt}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \left(\frac{\pi}{nt}\right)^{2} \cdot \frac{\int\limits_0^{nt} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)_*^{mp} dt}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt}. \tag{2.10}$$

Введя обозначение $u := nt$, где $u \in \mathbb{R}_+$, будем иметь

$$u^{\alpha+2} \geq \frac{\pi^{\alpha+2}\int\limits_0^{nt} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)_*^{mp} dt}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt}. \tag{2.11}$$

Для доказательства неравенства (2.11) воспользуемся схемой рассуждения, приведённой в работе [19]. Введём вспомогательную функцию

$$\mathcal{F}(u) := u^{\alpha+2} - \frac{\pi^{\alpha+2}\int\limits_0^{u} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)_*^{mp} dt}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\dfrac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt}.$$

Используя значение $\alpha := \alpha(m,p)$ из равенства (2.9), функцию $\mathcal{F}(u)$ перепишем в следующем виде:

$$\mathcal{F}(u) := u^{\alpha+2} - \pi^{\alpha}(\alpha+2)\int\limits_0^{u} t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp} dt. \tag{2.12}$$

Очевидно, чтобы имело место неравенство (2.11), достаточно доказать, что при любом $u \in \mathbb{R}_+$ функция $\mathcal{F}(u) \geq 0$. С этой целью сначала определим границу значений числа α. Воспользуемся двусторонним элементарным неравенством [19]

$$(\tau/\pi)^2 < 1 - \frac{\sin\tau}{\tau} < \tau/\pi, \tag{2.13}$$

справедливым при любом $\tau \in (0,\pi)$. Из равенства (2.9), с помощью правой части неравенства (2.13), имеем

$$\alpha > \frac{\pi^2}{\int\limits_0^{\pi} t(t/\pi)^{mp} dt} - 2 = mp. \tag{2.14}$$

Для получения оценки сверху, пользуясь левой частью (2.13), получаем

$$\alpha < \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t(t/\pi)^{2mp}dt} - 2 = 2mp. \tag{2.15}$$

Таким образом, из (2.14) и (2.15) имеем следующие границы значения числа $\alpha := \alpha(m,p)$:

$$mp < \alpha < 2mp. \tag{2.16}$$

Установим теперь неотрицательность функции (2.12) на $\mathbb{R}_+$. Отдельно рассмотрим три случая

$$1)\ 0 \le u \le \pi; \quad 2)\ \pi \le u \le t_*; \quad 3)\ t_* \le u < \infty.$$

Пусть сначала $0 \le u \le \pi$. Пользуясь тем, что при $0 \le t \le \pi$, $\sin t \ge t - t^3/6$, из (2.12) получаем

$$\mathcal{F}(u) = u^{\alpha+2} - \pi^\alpha(\alpha+2)\int\limits_0^u t\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp} dt \ge u^{\alpha+2} - \pi^\alpha(\alpha+2)\int\limits_0^u t\left(\frac{t^2}{6}\right)^{mp} dt =$$

$$= u^{\alpha+2} - \frac{\pi^\alpha(\alpha+2)}{(2mp+2)6^{mp}}u^{2mp+2} = u^{\alpha+2}\left(1 - \frac{\pi^\alpha(\alpha+2)}{(2mp+2)6^{mp}}\,u^{2mp-\alpha}\right). \tag{2.17}$$

Теперь из неравенств (2.15) и (2.17) следует, что в достаточно малой окрестности нуля справа функция $\mathcal{F}(u)$ принимает положительные значения. Докажем, что на всём интервале $(0,\pi)$ функция $\mathcal{F}(u)$ является знакопостоянной. Рассуждая от противного, предположим, что в некоторой точке $\xi \in (0,\pi)$ функция $\mathcal{F}(u)$ изменяет свой знак. Учитывая равенство (2.9), из (2.12) получаем $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(\pi) = 0$. Отсюда в силу теоремы Ролля получаем, что производная первого порядка

$$\mathcal{F}'(u) = \pi^\alpha(\alpha+2)u\left[\left(\frac{u}{\pi}\right)^\alpha - \left(1 - \frac{\sin u}{u}\right)^{mp}\right] \tag{2.18}$$

должна иметь на интервале $(0,\pi)$ не менее двух различных нулей. Из (2.18) следует, что такое же количество различных нулей на $(0,\pi)$ и в тех же точках должна иметь функция

$$\mathcal{F}_*(u) = \left(\frac{u}{\pi}\right)^{\alpha/mp} - 1 + \frac{\sin u}{u}. \tag{2.19}$$

Очевидно, что $\mathcal{F}_*(0) = \mathcal{F}_*(\pi) = 0$. Но это значит, что функция $\mathcal{F}_*$ на отрезке $[0,\pi]$ должна иметь не менее четырёх нулей. Записывая функцию $\mathcal{F}_*$ в виде $\mathcal{F}_*(u) = \widetilde{\mathcal{F}}_*(u)/u$, где

$$\widetilde{\mathcal{F}}_*(u) := \pi^{-\alpha/mp}\cdot u^{1+\alpha/mp} - u + \sin u,$$

приходим к заключению, что функция $\widetilde{\mathcal{F}}_*(u)$ также должна иметь на отрезке $[0,\pi]$ не менее четырёх различных нулей. Но тогда производная

$$\widetilde{\mathcal{F}}'_*(u) = \left(1 + \frac{\alpha}{mp}\right)\left(\frac{u}{\pi}\right)^{\alpha/mp} - 1 + \cos u \tag{2.20}$$

имеет не менее трёх нулей в интервале $(0,\pi)$. Из (2.20) следует, что $\widetilde{\mathcal{F}}'_*(0)=0$, и снова на основании теоремы Ролля вторая производная

$$\mathcal{F}''_*(u)=\left(1+\frac{\alpha}{mp}\right)\frac{\alpha}{mp}\left(\frac{u}{\pi}\right)^{(\alpha/mp)-1}\frac{1}{\pi}-\sin u \tag{2.21}$$

должна иметь на интервале $(0,\pi)$ не менее трёх различных нулей. Учитывая неравенство (2.16), из (2.21) заключаем, что $\mathcal{F}''_*(0)=0$, а потому производная третьего порядка

$$\mathcal{F}'''_*(u)=\left(1+\frac{\alpha}{mp}\right)\frac{\alpha}{mp}\left(\frac{\alpha}{mp}-1\right)\pi^{-\alpha/mp}u^{(\alpha/mp)-2}-\cos u \tag{2.22}$$

должна иметь на интервале $(0,\pi)$ не менее трёх различных нулей. Заметим, что функция $u^{(\alpha/mp)-2}$ является положительной монотонно убывающей выпуклой вниз на множестве $(0,\pi)$, а функция $-\cos u$ на $(0,\pi)$ не может иметь более одного нуля и на $(0,\pi/2)$ является выпуклой вниз, а на $(\pi/2,\pi)$ выпуклой вверх. На основании (2.22) заключаем, что функция $\widetilde{\mathcal{F}}'''_*(u)$ на интервале $(0,\pi)$ не может иметь более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает неравенство (2.11) в случае 1).

Приступая к рассмотрению случая 2) заметим, что из (2.21) следует, что при $u\in[\pi,t_*]$ функция $\widetilde{\mathcal{F}}''_*(u)$ принимает положительные значения, а значит, производная $\widetilde{\mathcal{F}}'(u)$ монотонно возрастает на отрезке $[\pi,t_*]$. Но поскольку, как следует из (2.20) и неравенства (2.16) $\widetilde{\mathcal{F}}'_*(\pi)=\dfrac{\alpha}{mp}-1>0$, то производная $\widetilde{\mathcal{F}}'_*(u)\ge 0$, при всех $\pi\le u\le t_*$. Но так как $\mathcal{F}_*(\pi)=0$, то сама функция $\mathcal{F}(v)\ge 0$, что и показывает справедливость неравенства (2.11) в случае $u\in[\pi,t_*]$.

Рассматривая случай 3), перепишем функцию (2.12) в развёрнутом виде

$$\mathcal{F}(u)=u^{\alpha+2}-\pi^{\alpha+2}-\pi^{\alpha}(\alpha+2)\int\limits_{\pi}^{t_*}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mp}dt-$$

$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp}(u^2-t_*^2). \tag{2.23}$$

Дифференцируя функцию (2.23), имеем

$$\mathcal{F}'(u)=(\alpha+2)u^{\alpha+1}-\pi^{\alpha}(\alpha+2)u\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp}=$$

$$=\pi^{\alpha+1}(\alpha+2)\left\{\left(\frac{u}{\pi}\right)^{\alpha+1}-\frac{u}{\pi}\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp}\right\}. \tag{2.24}$$

Используя левую часть неравенства (2.16), из (2.24) получаем

$$\mathcal{F}'(t_*)=\pi^{\alpha+1}(\alpha+2)\frac{t_*}{\pi}\left\{\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{\alpha}-\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp}\right\}>$$

$$>\pi^{\alpha+1}(\alpha+2)\left\{\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{mp}-\left(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\right)^{mp}\right\}>0. \tag{2.25}$$

Таким образом, из (2.24) и (2.25) следует, что производная $\mathcal{F}'(u)$ на множестве $t_*\le u<\infty$ является положительной монотонно возрастающей и так как согласно случаю 2) $\mathcal{F}(t_*)\ge 0$, то функция $\mathcal{F}(u)$ на этом множестве является неотрицательной, что равнозначно выполнению неравенства (2.12) в случае 3), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 2.1 имеют место равенства*

$$\mu_{2n}\left(W^{(r)}_{1/m,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi),L_2\right)=\mu_{2n-1}\left(W^{(r)}_{1/m,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi),L_2\right)=$$

$$=E_{n-1}\left(W^{(r)}_{1/m,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi)\right)=\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\mu_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

Теорема 2.2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p=1/m$. Если мажоранта Φ при любом $h\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/h)}\right)^{1/m}\ge\frac{2\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\frac{1}{(nh)^2}\int\limits_0^{nh}t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*dt, \tag{2.26}$$

то при любом $s=0,1,\ldots,r$ справедливы равенства

$$\sup\left\{E_{n-1}(f^{r-s}):\ f\in W^{(r)}_{1/m,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi)\right\}=\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right\}^m\frac{1}{n^s}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.27}$$

Доказательство. Из соотношения (44) работы [19] для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(r-s)})\le n^{-s+2m}2^{-m}\left\{\left(\frac{nh}{2}\right)^2-\sin^2\frac{nh}{2}\right\}^{-m}\left\{\int\limits_0^h t\,\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)dt\right\}^m. \tag{2.28}$$

Полагая в правой части (2.28) $h=\pi/n$ и учитывая определение класса $W^{(r)}_{p,h}(\widetilde{\Omega}_m,\Phi)$, получаем

$$E_{n-1}(f^{(r-s)})\le\frac{1}{n^s}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-1\right\}^{-m}\left\{2\left(\frac{n}{\pi}\right)^2\int\limits_0^{\pi/n}t\,\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(f^{(r)},t)dt\right\}^m\le$$

$$\le\frac{1}{n^s}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\frac{2^{2m}}{(\pi^2-4)^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)=\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right)^m\frac{1}{n^s}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.29}$$

Из доказательства теоремы 2.1 немедленно вытекает, что при $h=\pi/n$ множество тригонометрических полиномов $T_n\in\mathcal{T}_n$ удовлетворяет условию

$$\|T_n\|\le\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\right\}^m\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

и принадлежит классу $W^{(r)}_{1/m,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m, \Phi)$. Так как функция

$$f_0(x) = \left\{\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right\}^m \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos nx$$

принадлежит классу $W^{(r)}_{1/m,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m, \Phi)$ и

$$E_{n-1}(f_0^{(r-s)}) = \left\{\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right\}^m \frac{1}{n^s}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

то мы получаем

$$\sup\left\{E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) : f \in W^{(r)}_{1/m,\pi/n}(\widetilde{\Omega}_m, \Phi)\right\} \geq E_{n-1}(f_0^{(r-s)}) = \left\{\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4}\right\}^m \frac{1}{n^s}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (2.30)$$

Сравнивая оценку сверху (2.29) с оценкой снизу (2.30), получаем равенство (2.27), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.

Список литературы

1. Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Математические заметки. 1967. Т. 2, №5. С. 513–522. (English transl.: Chernykh N.I. On the best L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Matemathematical Notes. 1967. V. 2, №5. P. 513–522.)

2. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Математические заметки. 1976. Т. 20, №3. С. 433–438. (English transl.: Taikov L.V. Inequalities containing best approximations, and the modulus of continuity of functions in L_2 // Matemathematical Notes. 1976. V. 20, №3. P. 433–438.)

3. Юдин В.А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // ДАН СССР. 1980. Т. 251, №1. С. 54–57. (English transl.: Yudin V.A. Diophantine approximations in L_2 extremal problems // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1980. V. 251, №1. P. 54–57.)

4. Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Математические заметки. 1986. Т. 39, №5. С. 651–664. (English transl.: Babenko A.G. The exact constant in the Jackson inequality in L^2 // Matemathematical Notes. 1986. V. 39, №5. P. 651–664.)

5. Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Математические заметки. 1988. Т. 43, №6. С. 757–769. (English transl.: Ligun A.A. Exact Jackson type inequalities for periodic functions in the spaces L_2 // Matemathematical Notes. 1988. V. 43, №6. P. 757–769.)

6. Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: Тульский государственный университет, 1995. (Ivanov V.I., Smirnov O.I. Konstanty Dzheksona i konstanty Junga v prostranstvah L_p. Tula: Tulskiy gosudarstvennyj universitet, 1995 [in Russian].)

7. Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона – Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Математические заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 928–932. (English transl.: Babenko A.G., Chernykh N.I., Shevaldin V.T. The Jackson – Stechkin inequality in L_2 with a trigonometric modulus of continuity // Matemathematical Notes. 1999. V. 65, №6. P. 777–781.)

8. Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Математические заметки. 1999. Т. 66, №4. С. 494–499. (English transl.: Vakarchuk S.B. $\mathcal{K}$-functionals and exact values of n-widths of some classes in L_2 // Matemathematical Notes. 1999. V. 66, №4. P. 494–499.)

9. Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Математические заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 816–820. (English transl.: Esmaganbetov M.G. Widths of classes from $L_2[0, 2\pi]$ and the minimization of exact constants in Jackson-type inequalities // Matemathematical Notes. 1999. V. 65, №6. P. 816–820.)

10. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Математические заметки. 2004. Т. 76, №6. С. 803–811. (English transl.: Abilov V.A., Abilova F.V. Problems in the approximation of 2π-periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$ // Matemathematical Notes. 2004. V. 76, №6. P. 803–811.)

11. Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Математические заметки. 2005. Т. 78, №5. С. 792–796. (English transl.: Vakarchuk S.B. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of widths // Matemathematical Notes. 2005. V. 78, №5. P. 792–796.)

12. Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Математические заметки. 2010. Т. 87, №4. С. 616–623. (English transl.: Shabozov M.Sh. Widths of classes periodical differentiable functions in $L_2[0, 2\pi]$ // Matemathematical Notes. 2010. V. 87, №4. P. 616–623.)

13. Шабозов М.Ш. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2 // Известия АН Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2010. №4(141). С. 7–24. (English transl.: Shabozov M.Sh. The exact constants in the inequality of Jackson type and the exact value of n-widths of some classes functions from L_2 // News of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Department of physical, mathematical, chemical, geological and technical sciences. 2010. №4(141). P. 7–24.)

14. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Математические заметки. 2011. Т. 90, №5. С. 764–775. (English transl.: Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best polynomial approximation in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths // Matemathematical Notes. 2011. V. 90, №5. P. 764–775.)

15. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибирский матемематический журнал. 2011. Т. 52, №6. С. 1414–1427. (English transl.: Shabozov M.Sh.,

Yusupov G.A. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2 // Siberian Mathematical Journal. 2011. V. 52, №6. P. 1414–1427.)

16. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journal of Approximation Theory. 2012. V. 164, issue 1. P. 869–878.

17. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976. (Tikhomirov V.M. Nekotorye voprosy teorii priblizhenij. Moskva: Moskovskij gosudarstvennyj universitet, 1976 [in Russian].)

18. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985.

19. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Математические заметки. 2012. Т. 92, №4. С. 497–514. (English transl.: Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Jackson – Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2 // Matemathematical Notes. 2012. V. 92, №4. P. 497–514.)

20. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Математические заметки. 2013. Т. 94, №6. С. 905–914. (English transl.: Shabozov M.Sh., Tukhliev K. The best polynomial approximation and the widths of some functional classes in L_2 // Matemathematical Notes. 2013. V. 94, №6. P. 905–914.)

21. Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Математический сборник. 1994. Т. 185, №8. С. 81–102. (English transl.: Runovskiĭ K.V. On approximation by families of linear polynomial operators in L_p-spaces, $0 < p < 1$ // Matematicheskiĭ Sbornik. 1994. V. 185, №8. P. 81–102.)

22. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. (Dzyadik V.K. Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya. Moskva: Nauka, 1977 [in Russian].)

On the Approximation of Periodic Functions in L_2 and the Values of the Widths of Certain Classes of Functions

Tukhliev K.

Khujand State University,
Mavlonbekova, 1, Khujand, 735700, Tajikistan

Keywords: best polynomial approximation, Steklov operator, modulus of continuity, generalized modulus of continuity, n-widths

The sharp Jackson–Stechkin inequalities are received, in which a special module of continuity $\widetilde{\Omega}_m(f;t)$ determined by Steklov's function is used instead the usual modulus of continuity of mth order $\omega_m(f;t)$. Such generalized modulus of continuity of mth order were introduced by V.A. Abilov and F.V. Abilova. The introduced modulus of continuity found their application in the theory of polynomial approximation in Hilbert space in the works by M.Sh. Shabozov and G.A. Yusupov, S.B. Vakarchuk and V.I. Zabutnaya and others.

While continuing and developing these direction for some classes of functions defined by modulus of continuity, the new values of n-widths in the Hilbert space L_2 were found.

Сведения об авторе:
Тухлиев Камаридин,
кандидат физико-математических наук, доцент
Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова